Teoría de la Credibilidad en la evaluación de una cartera pequeña en Seguros de Vida

Abril 2025

Autores

SERGIO QUEROL

RUBEN RENGIFO

Índice

1. Introducción **1**

2. Caso práctico **1**

3. Demostración **2**

3.1. Credibilidad Parcial 2

3.2. Teorema Central de Límite 3

4. Aplicacion práctica **3**

5. Conlusiones **4**

Referencias **5**

1. Introducción

El objetivo principal de este análisis es abordar la problemática inherente a una cartera pequeña, es decir, desarrollar un modelo que permita estimar un α o ratio de siniestralidad más realista y representativo en función de los datos históricos disponibles. La dificultad radica en que, al tratarse de una cartera reducida, las fluctuaciones en los datos pueden ser significativas, lo que dificulta la obtención de estimaciones estables y confiables. Para mitigar esta incertidumbre, recurrimos a dos herramientas fundamentales en el ámbito actuarial y estadístico: la teoría de la credibilidad y el teorema central del límite.

En este estudio, hemos optado por emplear la teoría de la credibilidad clásica, principalmente debido a su simplicidad en la formulación y a la facilidad con la que permite obtener estimaciones prácticas. Este enfoque supone que la variable aleatoria Y sigue una distribución normal $N(m, s)$, lo cual, si bien es una hipótesis razonable en muchos contextos actuariales, puede ser una simplificación excesiva en casos donde la distribución de siniestralidad presenta colas pesadas o asimetrías marcadas. No obstante, la normalidad sigue siendo un supuesto ampliamente aceptado debido a su tratabilidad matemática y a su capacidad para modelar fenómenos en condiciones de agregación adecuadas. Para quienes deseen profundizar en las demostraciones matemáticas subyacentes, estas se encuentran detalladas en el Capítulo 3.

Dado que trabajamos con una cartera pequeña, la aplicación del teorema central del límite cobra especial relevancia. Bajo este principio, asumimos que las prestaciones a pagar en dicha cartera, al agregarse, tienden a comportarse de manera aproximada como una distribución normal. Sin embargo, esta aproximación depende de que el número de riesgos en la cartera sea lo suficientemente grande y de que las distribuciones individuales no sean excesivamente sesgadas o de varianza elevada. En caso de que estos supuestos no se cumplan, podría ser necesario recurrir a métodos más sofisticados, como distribuciones de colas pesadas o modelos bayesianos de credibilidad que incorporen información adicional.

En resumen, si bien la combinación de la teoría de la credibilidad clásica con el teorema central del límite proporciona una solución efectiva y operativa para estimar un α más realista en carteras pequeñas, es fundamental ser conscientes de las limitaciones de estos enfoques. La dependencia de la normalidad y la agregación suficiente de datos son supuestos clave que, en algunos casos, pueden requerir ajustes o refinamientos metodológicos para garantizar estimaciones más precisas y representativas de la realidad.

2. Caso práctico

Para un caso práctico utilizaremos una cartera relativamente pequeña ($\sim$ 10000 polizas) a la que le aplicaremos el Teorema Central del Limíte para conocer como se distribuye de forma aproximada obteniendo lo siguiente:

$$Y = X_1 + X_2 + ... + X_n \approx N\left(\sum_{i=1}^{n} C_i q_{x_i}, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_{x_i}(1 - q_{x_i})C_i^2}\right)$$

siendo X_i una distribución Bernoulli(q_{x_i}) y C_i la suma asegurada de cada póliza.

La distribución de Y no presenta cambios característicos significativos a lo largo de los años. Se supone unas primas puras constantes y con todo ello obtenemos la siguiente definición para el ratio de siniestralidad aplicando teoría de la credibilidad.

$$\alpha' = Z\frac{\bar{S}}{P} + (1 - Z)\frac{E(Y)}{P} = Z\alpha + (1 - Z)$$

siendo el estimador $\bar{S}$

$$\bar{S} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$$

y la credibilidad

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_i q_{x_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_{x_i}(1-q_{x_i})C_i^2}} \cdot \frac{\theta\sqrt{m}}{\Phi^{-1}(\frac{1+\beta}{2})}$$

siendo θ el margen de error y β el nivel de confianza y Φ^{-1} la inversa de la función de probabilidad acumulada.

Tanto el margen de error como el nivel de confianza se encuentran a criterio del analista obtenido en base a la experiencia.

Utilizando los datos que se disponen se puede obtener la credibilidad Z que dará un mayor peso a los datos empíricos en función del horizonte temporal disponible. Ya que a medida que los datos aumentan son más fiables que el supuesto teórico.

3. Demostración

Descripción general del marco teórico que sustenta el estudio, incluyendo los principios, conceptos y teorías relevantes que permiten comprender el fenómeno analizado y justifican la metodología empleada

3.1. Credibilidad Parcial

Se propone la siguiente combinación lineal para el estimador $\bar{S}$

$$z\bar{S} + (1-z)E(S)$$

Se utiliza el criterio de credibilidad completa [2] [1]

$$P(|z(\bar{S} - E(S))| \leq \theta E(S)) \geq \beta$$

$$P(|(\bar{S} - E(S))| \leq \frac{\theta}{z} E(S)) \geq \beta$$

Ahora solo desarrollamos la parte izquierda de la ecuación y obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\bar{S} - E(S)\right| \leq \theta E(S)\right) &= P\left(\frac{\left|\bar{S} - E(S)\right|}{z\sqrt{\mathrm{Var}(S)/m}} \leq \frac{\theta E(S)}{z\sqrt{\mathrm{Var}(S)/m}}\right) \\
&\approx P\left(-\frac{\theta E(S)}{z\sqrt{\mathrm{Var}(S)/m}} \leq Z \leq \frac{\theta E(S)}{z\sqrt{\mathrm{Var}(S)/m}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\theta E(S)}{z\sqrt{\mathrm{Var}(S)/m}}\right) - \Phi\left(-\frac{\theta E(S)}{z\sqrt{\mathrm{Var}(S)/m}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\theta E(S)}{z\sqrt{\mathrm{Var}(S)/m}}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{\theta E(S)}{z\sqrt{\mathrm{Var}(S)/m}}\right)\right) \\
&= 2\Phi\left(\frac{\theta\sqrt{m}E(S)}{z\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}\right) - 1
\end{aligned}$$

recuperando la ecuacion anterior y suponiendo igualdad la credibilidad

$$= 2\Phi\left(\frac{\theta\sqrt{m}E(S)}{z\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}\right) - 1 = \beta$$

$$z = \frac{E(S)\theta\sqrt{m}}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}\Phi^{-1}(\frac{1+\beta}{2})}$$

3.2. Teorema Central de Límite

De manera general si $X_1, X_2, ..., X_n$ son variables de esperanza $\mu_i = E(X_i)$ y varianza $\sigma_i^2 = Var(X_i), i = 1, ..., n$ se verifica que la variable suma $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ (siendo n un número grande) se puede aproximar por una variable normal

$$Y = X_1 + X_2 + ... + X_n \approx N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}\right)$$

Supongamos que X_i es una variable Bernoulli con probabilidad de éxito q_{x_i} cuya media es $\mu_i = q_{x_i}$ y varianza $\sigma_i^2 = q_{x_i}(1 - q_{x_i})$

por lo tanto, Y se distribuye de la siguiente manera

$$Y = N\left(\sum_{i=1}^{n} q_{x_i}, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_{x_i}(1 - q_{x_i})}\right)$$

Se debe dejar en claro que es el teorema central de límite general en el que las variables X_i no tienen por que proceder de la misma distribución. Cumpliendo ciertos criterios como la independencia, varianza finita y que ninguna de las variables tienen un impacto desproporcionado en la suma, se puede aplicar esta aproximación a una Normal.

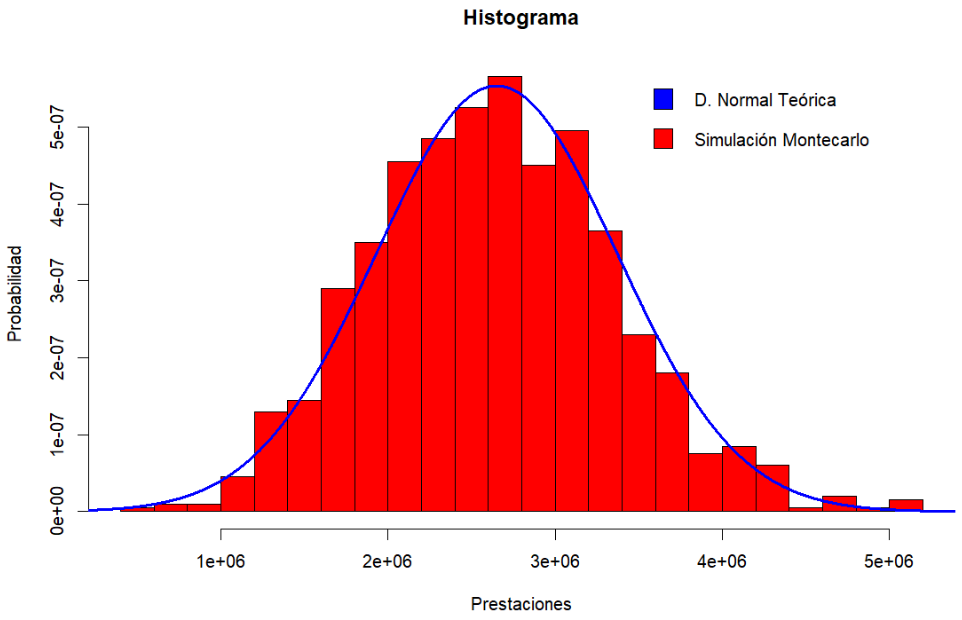

Figura 1: Simulación de una cartera pequeña para comprobar el TCL

4. Aplicacion práctica

El desarrollo de esta demostración viene motivado por la necesidad de aplicación de la TC en una herramienta de optimización de reaseguro proporcional en carteras de vida-fallecimiento llamada Re[Nfq] desarrollada por el departamento actuarial de Nfq Advisory.

Esta herramienta necesita conocer el α siniestral de la cartera que se vaya a optimizar para realizar las simulaciones que buscan el programa de reaseguro óptimo de la cartera, y para carteras con n o m pequeñas, se debe aplicar la TC para calcular el α siniestral ponderado o α' siniestral.

Si es verdad que la TC tiene tres enfoques como se ha visto anteriormente, el enfoque que se ha elegido, es decir, Credibilidad Clásica, suele tener como principal crítica la elección de β y θ.

En la mayoría de los casos, la elección de estas variables viene definida únicamente por el juicio experto del actuario, sin que haya criterios objetivos que la justifiquen. En el caso concreto de Re[Nfq], la elección de estas variables para el cálculo del α' vendrá definida por las características demostrables de la cartera.

Por ejemplo, en el caso de una cartera de una mutualidad de médicos, formada únicamente por médicos en función de la mutualidad.

5. Conlusiones

La teoría de la credibilidad es una herramienta estadística fundamental en el ámbito actuarial, ya que permite mejorar las estimaciones cuando se dispone de información limitada o variable. Su principal ventaja es que combina de forma óptima la experiencia propia de una cartera (por ejemplo, una cartera pequeña de seguros de vida riesgo) con información más amplia o poblacional. Esto da lugar a estimaciones más estables, precisas y menos sensibles a fluctuaciones aleatorias. La credibilidad asigna un peso a la experiencia individual en función de su volumen y variabilidad, lo que permite valorar cuánto de confiable es esa información por sí sola. Así, se evitan conclusiones erróneas por falta de datos o alta volatilidad. Es especialmente útil en estos casos, donde a menudo se trabaja con datos limitados por riesgo o por segmento, permitiendo tomar decisiones más fundamentadas.

Referencias

[1] Mª Pons Cardell. *La Teoría de la Credibilidad y su aplicación a los seguros colectivos*. Universitat de Barcelona, 1991.

[2] Luis Rincón. *Introducción a la teoría del riesgo*. Facultad de Ciencias, UNAM, 2012.